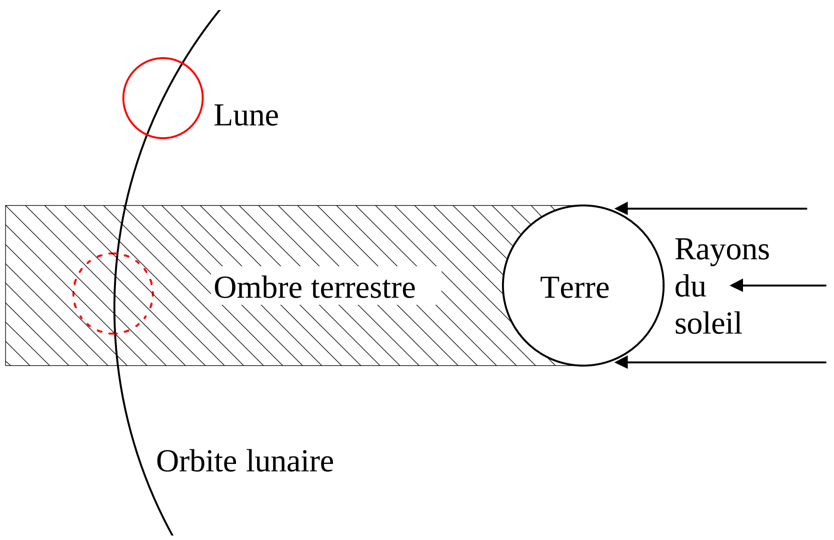
TRAVAUX DIRIGES

DISTANCES DE LA TERRE A LA LUNE ET AU SOLEIL

-280	**ARISTARQUE de Samos** donne une mesure de la terre à la lune et de la terre au soleil. Il est le seul à proposer un modèle où le soleil est au centre du monde.
II^{ème} siècle ap. J-C.	Dans le modèle de **PTOLEMEE** , la terre est au centre de l'univers, la lune et le soleil décrivent des cercles autour de la terre, selon un mouvement uniforme.
1532	Le système de **COPERNIC** place le soleil au centre de l'univers. Le mouvement apparent des étoiles est dû à la rotation de la terre sur elle même.
1609	Les lois de **KEPLER** décrivent le mouvement des planètes : non uniforme, sur des ellipses.
1666	**NEWTON**, par la loi de la gravitation universelle, donne une "explication" générale du mouvement des planètes.
1916	**EINSTEIN**, dans la théorie de la relativité générale, révèle la courbure de l'univers.
1929	**HUBBLE** remarque que plus les objets sont éloignés, plus les raies de leur spectre lumineux sont décalées vers le rouge.

I DISTANCE DE LA TERRE A LA LUNE :

Au troisième siècle avant notre ère, Aristarque de Samos, donna une bonne appréciation de la distance Terre-Lune.

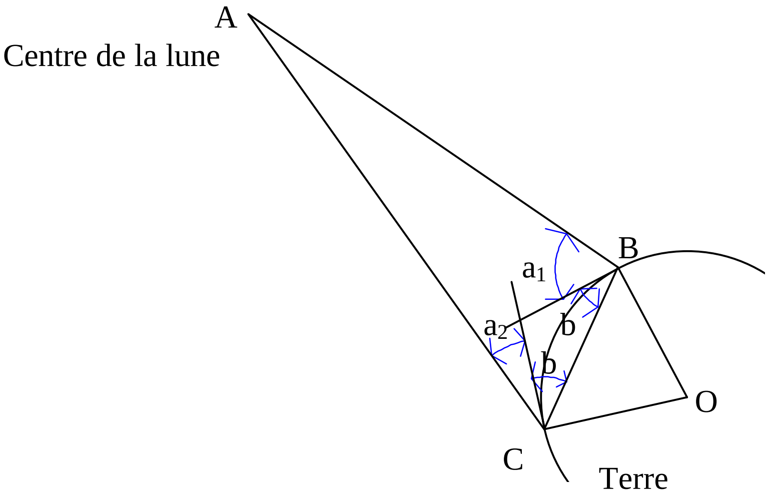


Il utilisa la distance parcourue par la lune durant une éclipse totale de lune :

Sachant que les phases de la lune se reproduisent tous les 29,5 jours, celle-ci parcourt son orbite supposée circulaire pendant le même temps.
On note t la durée de l'éclipse, durant laquelle la lune parcourt une distance égale au diamètre de la terre.

1) En supposant le mouvement de la lune uniforme, la distance parcourue est proportionnelle au temps. Exprimer ainsi la distance TL (terre/lune) en fonction du temps t de l'éclipse et du rayon r de la terre.

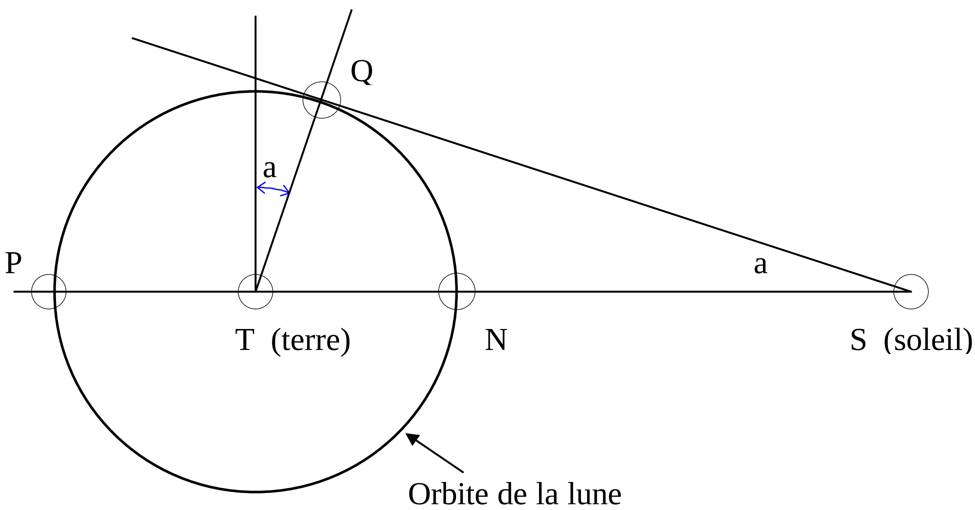
Plus tard on mesura la distance Terre-Lune par triangulation : deux des sommets étant Berlin et Le Cap (Afrique du Sud), le troisième le centre de la Lune. Cette méthode améliora la précision. Elle fut effectuée par Lacaille et Lalande en 1752.



2) a) La latitude de Berlin est 52°30'N, celle du Cap est 33°55'S.
Calculer l'angle b et la distance BC (rayon terrestre moyen r ≈ 6367 km).
b) Donner l'expression de la distance Terre-Lune AB, en fonction des angles a_1 et a_2, hauteurs de la Lune à Berlin et au Cap, mesurées sur le terrain, au même instant, quand la lune passe au méridien commun de ces deux villes.

II DISTANCE DE LA TERRE AU SOLEIL :

C'est encore Aristarque de Samos qui le premier donna une évaluation (très erronée) de la distance Terre-Soleil. Le principe est basé sur l'observation des phases de la Lune.

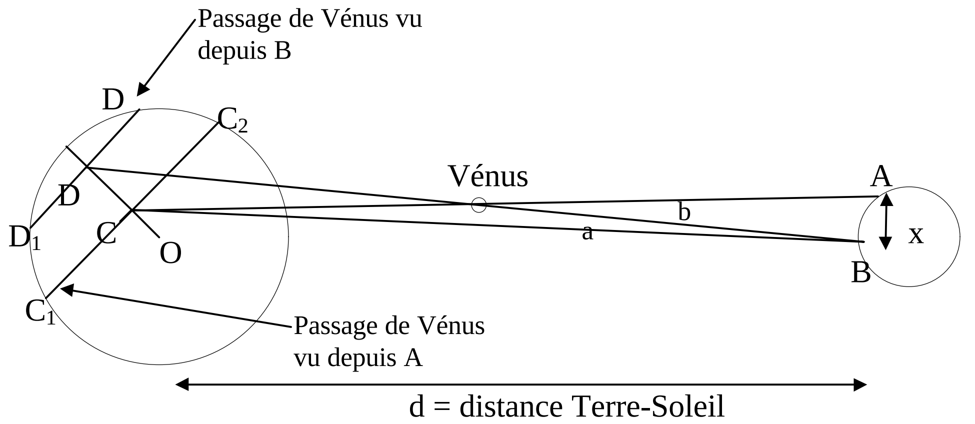


1) a) Quel est l'aspect de la Lune, vue de la Terre, lorsqu'elle est en N, puis en Q, puis en P ?
b) Aristarque estima la différence entre le temps t_1 mis par la Lune pour aller de N à Q, et le temps t_2, pour aller de Q à P, à 12 heures. En admettant l'orbite circulaire et les angles et les temps proportionnels (ce qui est naturel chez les Grecs), déterminer la mesure de l'angle a.
c) En déduire le rapport TS/TQ des distances Terre-Soleil et Terre-Lune.

L'erreur d'Aristarque vient du fait qu'il avait surestimé la valeur $t_2 - t_1$ qui vaut en fait 35 minutes.
Il faut attendre 17 siècles pour avoir une valeur correcte de la distance Terre-Soleil, qui fait appel à la troisième loi de Kepler (la triangulation était trop peu précise car le triangle trop aplati).

2) Selon la troisième loi de Kepler, pour chaque planète du système solaire, le rapport $\frac{T^2}{d^3}$, où T est la période de la planète et d sa distance moyenne au Soleil, est constant.
Ayant observé que la période de la Terre est de 365,256 jours et celle de Vénus 224,701 jours (terrestres), déterminer le rapport VT/VS entre les distances Vénus-Terre et Vénus-Soleil.

On attendit un "passage" de Vénus. On nomme ainsi le passage de Vénus devant le disque solaire, vu depuis la terre. Une mesure fut réalisée le 3 juin 1769. Un observateur était à Varda (Suède), noté A, l'autre, plus chanceux, à Tahiti, noté B.



Soleil, vu de face, depuis la Terre

Terre vue en coupe

3) a) La durée du passage de Vénus observée depuis A est de 5h56mn1s. La durée du passage observé depuis B est de 5h44mn1s. Le diamètre solaire, vu depuis la terre, est de 32' de degrés.
Ayant précédemment observé que Vénus met 8 h pour parcourir ce diamètre, compléter le tableau de proportionnalité suivant :

Temps	8h	5h56mn1s	5h44mn1s
angle parcouru (vu de la terre)	32'		
distance parcourue	diamètre solaire	C_1C_2	D_1D_2

A l'aide du théorème de Pythagore, exprimer DC en fonction de DD_1, CC_1 et du rayon du Soleil. En déduire l'angle a dont on voit DC depuis la Terre.

b) Les angles a, b, c étant petits, on peut les confondre avec leur tangente, s'ils sont exprimés en radian. D'où les relations : b = x/VT = CD/VS ; a = CD/d .

Montrer que $d = \dfrac{x}{\dfrac{a.VT}{VS}}$, où a est exprimé en radians.

c) Sachant que la distance entre les deux points d'observation est x = AB = 6500 km, en déduire une estimation de la distance Terre-Soleil, à comparer à la "vraie" valeur : 149500000km.

La troisième loi de Kepler permet ainsi de connaître les dimensions du système solaire. On peut, par triangulation, mesurer les distances aux étoiles jusqu'à 4 années lumières. Au delà, c'est la méthode physique du "décalage vers le rouge" qui permet d'évaluer les distances

CORRIGE

I – Distance Terre – Lune :

1) Si l'on considère que la distance est proportionnelle au temps, on a $\frac{2\pi \times TL}{29,5} = \frac{2r}{t}$ d'où TL = $\frac{29,5r}{\pi t}$.

2) a) Dans le triangle isocèle OBC, l'angle en O correspond à la différence de latitude, soit 86°25'.

On a alors b = 90° - $\frac{180° - 86°25'}{2}$ = 43°12'30''.

D'après la formule des sinus dans OBC, on a : $\frac{BC}{\sin 86°25'} = \frac{6367}{\sin 46°47'30''}$.

D'où BC ≈ 8718 km.

b) D'après la loi des sinus,
$$\frac{BC}{\sin(180° - (a_1 + a_2 + 2b))} = \frac{AB}{\sin(a_2 + b)}.$$

II – Distance Terre-Soleil :

1) a) En N, la lune est (pratiquement) invisible. En Q, on voit le premier quartier dans l'hémisphère Nord. En P, c'est la pleine lune.

b) On a le tableau de proportionnalité suivant :

temps	12 h	29,5×24 h
angles	2a	360°

D'où a = $\frac{360}{708} \times 6 \approx 3,051°$.

c) Dans le triangle TQS, rectangle en Q, on a : sin 3,051° = $\frac{TQ}{TS}$ d'où $\frac{TQ}{TS} \approx 18,8$.

2) On a $\frac{ST^3}{SV^3} = \frac{365,256^2}{224,701^2}$ d'où l'on déduit $\frac{ST}{SV} = \sqrt[3]{\frac{365,256^2}{224,701^2}}$ puis, compte tenu de l'ordre Soleil, Vénus, Terre, $\frac{ST}{VS} = \frac{SV + VT}{SV} = 1 + \frac{VT}{VS}$.

Donc $\frac{VT}{VS} = \sqrt[3]{\frac{365,256^2}{224,701^2}} - 1 \approx$ **0,38**.

3) a) Par proportionnalité on a :

Temps	8h	5h56'1"	5h44'1"
Angle	32'	$\frac{32}{8} \times 5,9336 \approx 23,7344'$	22,9344'
Distance	diamètre solaire	C_1C_2	D_1D_2

D'après le théorème de Pythagore, $OD^2 = OD_1^2 - D_1D^2$ et $OC^2 = OC_1^2 - C_1C^2$.

D'où DC = OD – OC et

DC = $\sqrt{OD_1^2 - D_1D^2} - \sqrt{OC_1^2 - C_1C^2}$.

En considérant la proportionnalité des angles et des distances, on en déduit que : a =
$$\sqrt{16^2 - \left(\frac{22,9344}{2}\right)^2} - \sqrt{16^2 - \left(\frac{23,7344}{2}\right)^2}$$
≈ **0,426'** .

b) On a d = $\frac{CD}{a}$. On exprime ensuite CD :

$x \times VS = VT \times CD$ d'où CD = $\frac{VS \times x}{VT}$.

On en déduit que :
$$d = \frac{\frac{VS \times x}{VT}}{a} = \frac{x}{a\frac{VT}{VS}}.$$

c) En remplaçant dans la formule précédente les valeurs calculées, on obtient :
$$d \approx \frac{6500}{\frac{0,426}{60} \times \frac{\pi}{180} \times 0,38} \approx 138\ 036\ 533 \text{ km.}$$

Il est possible d'améliorer la précision des calculs précédents.

REFERENCES

❑ HISTOIRES DE PROBLEMES / HISTOIRE DES MATHEMATIQUES – IREM – Ellipses 1993.
Article de Monique et André BELET (IREM de Toulouse) : "Que nul n'observe le ciel s'il n'est géomètre !".

❑ Au niveau des classes préparatoires :
TERRE ET ESPACE – Hors série n° 5 de Tangente – Ellipse 1998.
Article de G. WALUSINSKI : "Les arpenteurs de l'univers".